

FORMULARIO DINÁMICA I

DINÁMICA DE TRASLACIÓN

Leyes de Newton.

1.- Toda partícula abandonada a sí misma (si sobre ella no actúan fuerza alguna o la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es cero) está en reposo o en movimiento rectilíneo e uniforme. $\sum F = 0$

2.- Las fuerzas que actúan sobre una partícula son proporcionales a las aceleraciones que le producen. $\sum F = m \cdot a$

A la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración que produce, se le llama masa inerte de la partícula.

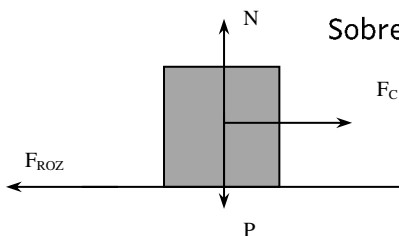
3.- Cuando dos partículas interaccionan, la fuerza que la primera ejerce sobre la segunda (F_{12}) es igual y opuesta que a la que la segunda ejerce sobre la primera (F_{21}) estando ambas sobre la recta que las une.

$$F_{12} + F_{21} = 0$$

Peralte.

Consideremos el caso de un automóvil que toma una curva de radio R con una velocidad v. Vamos a estudiar tres posibilidades:

1.- La carretera es horizontal, no tiene peralte y existe rozamiento.

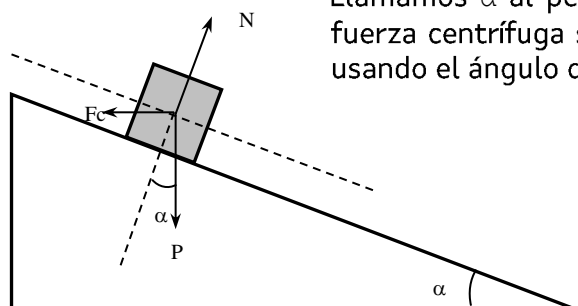


Sobre el vehículo actúan la F_c (fuerza centrífuga), causante del deslizamiento o derrape y la F_{roz} (fuerza de rozamiento), que impide el derrape.

El coche tomará la curva sin derrapar si, como máximo, $F_c = F_{roz}$, de forma que $m \cdot \frac{v^2}{R} = \mu \cdot m \cdot g$ por lo tanto $v =$

$$\sqrt{\mu \cdot R \cdot g}$$

2.- La carretera tiene peralte y el rozamiento es despreciable



Llamamos α al peralte de la carretera. Tanto el peso como la fuerza centrífuga se pueden descomponer en otras dos fuerzas usando el ángulo de peralte, de forma que:

$$F_{cx} = F_c \cdot \cos \alpha$$

$$F_{cy} = F_c \cdot \sin \alpha$$

$$P_x = P \cdot \sin \alpha$$

$$P_y = P \cdot \cos \alpha$$

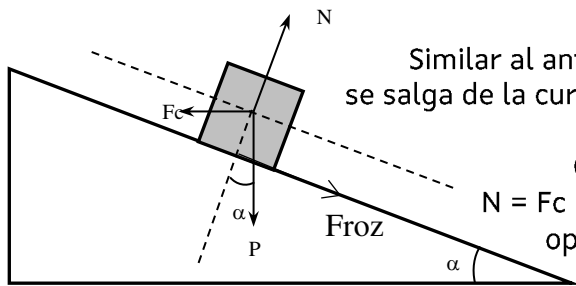
Para que el coche no se salga de la curva,

$$F_c \cdot \cos \alpha = P \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Así que } \tan \alpha = \frac{F_c}{P} = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

De esta forma se deduce el ángulo que debe tener el peralte para que el vehículo no se salga (como vemos, depende de la velocidad y del radio de la curva)

3.- La carretera tiene peralte y rozamiento



Similar al anterior, pero con rozamiento. Para que el coche no se salga de la curva, se debe cumplir que

$$F_c \cdot \cos \alpha = P \cdot \sin \alpha + F_{roz}$$

Como, en el eje de las y el equilibrio es:

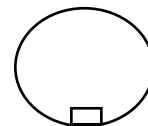
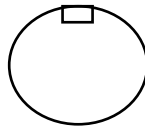
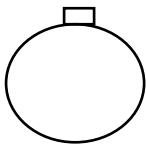
$$N = F_c \sin \alpha + P \cdot \cos \alpha \quad \text{y además } F_{roz} = \mu \cdot N,$$

operando:

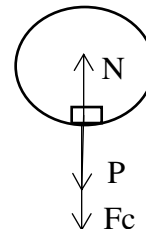
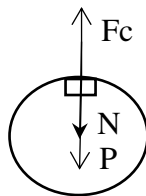
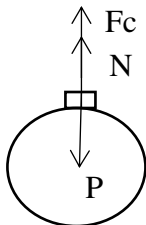
$$\tan \alpha = \frac{F_c - \mu mg}{mg + \mu F_c} \quad \text{o también} \quad \tan \alpha = \frac{v^2 - \mu Rg}{Rg + \mu v^2}$$

Dinámica del movimiento circular uniforme.

Imaginemos los siguientes casos de un vehículo (rectángulo) pasando por una vía (circular):



En cada caso, hay que dibujar bien el peso (siempre vertical y hacia el centro de la Tierra), la normal (siempre perpendicular a la superficie de contacto) y la fuerza centrífuga (siempre hacia fuera de la curva).



Y por lo tanto, en cada caso, el equilibrio sería:

$$P = N + F_c$$

$$P + N = F_c$$

$$N = P + F_c$$

DINÁMICA DE ROTACIÓN

Rotación pura: un sólido tiene movimiento de rotación pura cuando sus puntos describen circunferencias cuyos centros se encuentran en una misma recta fija llamada eje de rotación.

Traslación y rotación combinadas: es el movimiento más general que puede tener un sólido. Por complicado que sea el movimiento de un sólido siempre se puede considerar como la combinación de dos movimientos puros: una traslación del centro de masas y una rotación alrededor del mismo.

Es importante notar que para que un cuerpo avance rodando es necesaria la existencia de rozamiento. De no existir éste, el cuerpo patinaría o deslizaría sin rodar.

De la misma forma que $\sum F = m \cdot a$ para que un cuerpo se traslade, podríamos definir que para que un cuerpo rote debe suceder que $\sum M = I \cdot \alpha$, donde M es el momento de una fuerza¹, I es momento de inercia del cuerpo y α es la aceleración angular.

Cabe indicar los momentos de inercia de objetos habituales:

- De un cilindro de masa m y radio r: $I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
- De una esfera de masa m y radio r: $I = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
- De una varilla de masa m y longitud l: $I = \frac{1}{3} m \cdot l^2$

¹ El momento de una fuerza respecto a un punto se calcula como el producto vectorial de la fuerza por el vector de posición de la misma respecto al punto sobre el que se calcula el momento.

FUERZAS DE ROZAMIENTO

Definimos las fuerzas de rozamiento como fuerzas que se oponen al movimiento, las cuales se manifiestan en la superficie de contacto de dos sólidos, siempre que uno de ellos se mueva o tienda a moverse sobre el otro. Es independiente de la velocidad con que se desliza un sólido sobre el otro, y también de la magnitud de las superficies. Sin embargo sí que depende de la naturaleza de dichas superficies. Y es proporcional a la fuerza normal que comprime una superficie contra la otra.

Es importante indicar que normalmente se clasifican como fuerzas de ligadura, y que para entenderlas correctamente hay que tener en cuenta que son fuerzas "pasivas" (es decir, no actúan por sí solas, sino que se oponen al movimiento provocado por otras fuerzas)

Según el tipo de movimiento estudiado, el rozamiento puede ser:

- **Deslizamiento:** Se da entre dos superficies planas cuando una se mueve con respecto a la otra, estando sus superficies en contacto.

$$F_r = \mu N$$

donde N es la fuerza normal de reacción, y μ es el coeficiente de rozamiento entre dos superficies. Este coeficiente de rozamiento puede ser estático o dinámico pero en la mayoría de ejercicios no hará referencia a esta diferencia, y simplemente tendremos como dato (o pedirán que calculemos) el coeficiente de rozamiento por deslizamiento.

- **Rodadura:** es debido al rozamiento producido por la rotación de un cuerpo sobre otro. En general el coeficiente de rozamiento por rodadura es estático, porque el suelo y el contacto con el objeto rodante tiene velocidad nula entre ellos durante todo el movimiento de rodadura. Es menor que el de deslizamiento, y decimos de este rozamiento que crea movimiento de rodadura, y no que "destruye".

Dibujando las fuerzas que actúan sobre el objeto rodante (cilindro, esfera, anillo, etc...), tendríamos lo que vemos en el dibujo. Apliquemos las condiciones de dinámica:

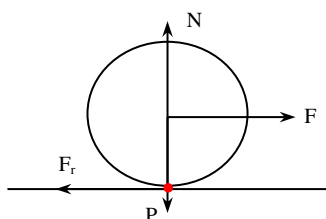


Figura 1

$$\begin{aligned} \sum F &= m \cdot a \\ \sum M &= I \cdot \alpha \end{aligned}$$

- Si la suma de las fuerzas que actúan sobre el objeto rodante es nula, no habrá movimiento de traslación ($a = 0$).

• Si la suma de los momentos de las fuerzas es nula, no habrá movimiento de rodadura ($\alpha = 0$). Como vemos en el dibujo, tanto la normal, la fuerza F y el peso pasan por el eje de rotación del objeto rodante, así que sus momentos son cero.

Como ya indicamos, es importante tener en cuenta que las fuerzas de rozamiento son fuerzas "pasivas". En muchos ejercicios se nos proporcionará un valor de fuerzas de rozamiento que serán, en todo caso, máximas (siempre que las fuerzas que provocan el movimiento sean elevadas). Pero el valor de la F_r no es siempre el máximo, como podríamos ver en un sencillo ejemplo:

Supongamos un cuerpo de 10 Kg de peso en reposo sobre un plano horizontal que es empujado por una fuerza F . El coeficiente de rozamiento es 0,5. ¿Cuánto vale la $F_{\text{rozamiento}}$?

La respuesta correcta sería: depende del valor de F . Si F es muy pequeña, por ejemplo 3 N, y aplicamos la dinámica de Newton, tendremos que $\sum F = m \cdot a \implies F - F_{\text{roz}} = 0$ y por lo tanto la $F_{\text{rozamiento}} = 3 \text{ N}$

En cambio, por el enunciado, vemos que la $F_{\text{rozamiento}}$ máxima será 50 N (tomando $g = 10 \text{ m/s}^2$). Como vemos, el valor de la fuerza de rozamiento depende de la fuerza que activa el movimiento.

UN OBJETO RODANTE: ¿SÓLO RUEDA, O RUEDA Y DESLIZA?

De forma general, indicamos que se tienen que dar una serie de condiciones para que el cilindro solamente ruede:

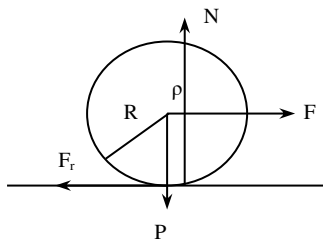
- 1.- que $s = \theta \cdot r$; que $v = \omega \cdot r$ y que $a = \alpha \cdot r$
- 2.- que los sentidos de v y ω (por un lado) y de a y α (por el otro) se correspondan. Es decir, que si el movimiento de traslación es acelerado, el de rotación debe serlo. Y si el cilindro se desplaza hacia la derecha, el cilindro debe girar en el sentido de la agujas de un reloj.

A la hora de trasladar esto a los problemas tendremos dos posibles situaciones:

- a) Que exista una fuerza permanente sobre el objeto rodante que intente que deslice, por ejemplo, al tirar un objeto rodante por un plano inclinado. Habrá que analizar si se cumple, o no, la condición de rodadura respecto a las aceleraciones: $a = \alpha \cdot R$
- b) Que exista una velocidad lineal (o angular) inicial del objeto rodante, pero no exista una fuerza que intente deslizar a dicho objeto de forma permanente (por ejemplo, una bola de billar golpeada en el centro de la misma). En este caso, hay que tener en cuenta que la fuerza de rozamiento al deslizamiento se hace nula ya que, recordemos, es una fuerza pasiva (de ligadura), lo que significa que, si no se provoca su aparición, la fuerza no actúa.

Analizaremos primero los problemas en los que existe una fuerza permanente sobre el objeto que intenta provocar el deslizamiento del mismo. Es la situación descrita anteriormente como a)

Nos dan un problema donde se proporciona el coeficiente de rozamiento μ , y nos piden que indiquemos si el cuerpo rueda y desliza o sólo rueda.



Aplicamos las dos conocidas condiciones de la dinámica:

Traslación: $\sum F = m \cdot a \Rightarrow F - F_r = m \cdot a$

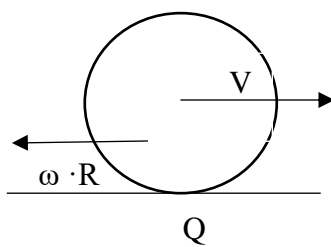
Rotación: $\sum M = I \cdot \alpha \Rightarrow F_r \cdot R = I \cdot \alpha$

Tenemos que comprobar que la fuerza de rozamiento obtenida de estas ecuaciones no es mayor que la fuerza de rozamiento máxima calculada $F_r(\text{max}) = \mu \cdot N$ a partir del valor del coeficiente de rozamiento que nos proporciona el problema. Si la fuerza de rozamiento de nuestro problema no es mayor que ésta (máxima), entonces se cumplen los supuestos y el cilindro no desliza, sino que sólo rueda. *NOTA: estamos hablando de los coeficientes de rozamiento por deslizamiento. Cabe recordar que aunque un cilindro no deslice y se mueva sólo por rodamiento puro, sí existe una fuerza de rozamiento por fricción que es la responsable de que el cilindro gire. Lo importante es que el valor de este rozamiento no sea mayor que el máximo teórico, porque de lo contrario, el cilindro sí deslizará.*

Si comprobamos que no desliza, sino que solamente rueda sí que se cumple que $a = \alpha \cdot R$. Si el objeto desliza no podemos aplicar esta ecuación, porque la aceleración lineal será mayor que la angular ya que no sólo acelera debido a la rodadura, sino también al deslizamiento.

Analizaremos ahora los problemas en los que no existe una fuerza permanente sobre el objeto que intenta provocar el deslizamiento del mismo. Es la situación descrita anteriormente como **b)**

CASO 2.- En este caso, calcularemos cuanto varían las velocidades lineal y angular del objeto rodante, para posteriormente imponer la condición de rodadura: $v = \omega \cdot R$ (o, lo que sería lo mismo, analizar la velocidad del punto de apoyo entre el objeto rodante y la superficie sobre la que se apoya). Es decir:



La velocidad del punto Q se calcula como:

$$V_Q = V - \omega \cdot R$$

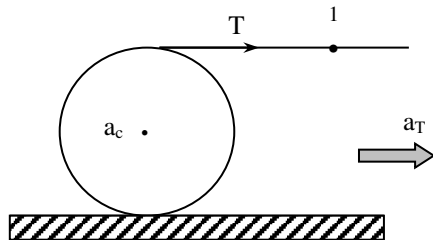
Donde V_Q es la velocidad del punto Q, V es la velocidad del centro de masas y ω es la velocidad angular del mismo, que justo en el punto Q tiene dirección inversa. En el momento en que empieza a rodar, la velocidad del punto Q es nula, por tanto $V = \omega \cdot R$

(Al final del formulario veremos ejemplos de todos los casos)

Ver simulador: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/solido/carrete/carrete.html>

RELACIÓN ENTRE a Y α CUANDO HAY RODADURA

Imaginemos que queremos calcular la aceleración del centro de masas de un cilindro. Podemos calcularla como $a_c = \alpha \cdot r$, porque esta es la relación entre las magnitudes

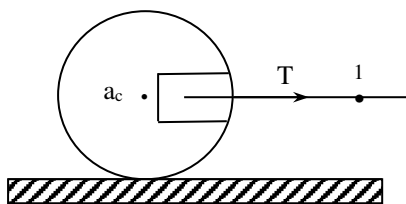


lineales y angulares; El problema viene en el cálculo de la aceleración total del cilindro, no solo de su centro de masas. Es decir, para calcular a_T , en el dibujo. Podemos pensar en calcular a_T como el cálculo de la aceleración del *punto 1* de la cuerda que tira del cilindro. Como vemos, hay diferencia en calcular a_c e a_T : la aceleración total (la de ese *punto 1*) es

igual a la suma de la aceleración del centro de masas, más la aceleración provocada por la rotación pura (es decir, la aceleración debida al desenrollamiento de la cuerda). ¿El resultado cuál es? Pues que si queremos calcular la aceleración total del sistema, tenemos que poner que $a_T = a_c + \alpha \cdot r$

Como ya expresamos varias veces, $a_c = \alpha \cdot r$, por lo tanto $a_T = 2 \cdot \alpha \cdot r$

Lo más importante es notar la diferencia entre a_c e a_T para cuando nos pidan una cosa o la otra en los problemas. Un ejemplo claro para ver la diferencia consiste en pensar en un problema similar, pero de este tipo:



A diferencia del caso anterior, la cuerda en este caso no se desenrolla. Por lo tanto, la aceleración del punto 1 será la misma que la del centro de masas, entonces a_c será igual que a_T . Como vemos, la diferencia es clara con respecto al caso anterior.

Tan sólo nos falta hacer la observación de que estos dos mismos casos se podrían dar en vertical en lugar de en horizontal.

ENERGÍAS (TRASLACIÓN Y ROTACIÓN)

- **Energía potencial:** energía que posee un cuerpo por el simple hecho de estar desplazado de su posición de equilibrio.
 - *Gravitatoria:* $E_p = mgh$ (masa · aceleración de gravedad · altura)
 - *Elástica:* $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ (constante del resorte · elongación al cuadrado)
- **Energía cinética traslación:** energía que posee un cuerpo por el hecho de estar en movimiento de traslación: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- **Energía cinética de rotación:** energía que posee un cuerpo por el hecho de girar: $E_c = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

Todas las energías se expresan en Julios (sistema internacional)

- **Conservación de la energía mecánica:** La energía mecánica no se crea ni se destruye, sino que se convierte de unas formas de energía en otras. Podemos escribir que en dos puntos cualesquiera, $E_m(1) = E_m(2)$
Si hay rotación y traslación, tendríamos que $E_p(1) + E_{c \text{ traslación}}(1) + E_{c \text{ rotación}}(1) = E_p(2) + E_{c \text{ traslación}}(2) + E_{c \text{ rotación}}(2)$

TENSIÓN EN POLEAS

Cuando un cable rodea una polea, las tensiones a ambos lados de la polea siempre son diferentes la una a la otra, excepto cuando la polea tiene masa despreciable, y por lo tanto no tiene momento de inercia. Esto es debido a la aplicación de la segunda ley de la dinámica en movimientos de rotación:

$$\sum M = I \cdot \alpha$$

Si a ambos lados de una polea que gira tenemos dos cuerdas, la ecuación quedará:

$$T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = I \cdot \alpha$$

Pero en el caso de que la polea tenga masa despreciable, su momento de inercia I será nulo, por lo tanto $T_1 \cdot r - T_2 \cdot r = 0$ y en este caso, el valor de las tensiones es idéntica a ambos lados de la polea.

FUERZAS CENTRÍFUGAS

Como sabemos, las fuerzas centrífugas son fuerzas ficticias (no reales), y por lo tanto son fuerzas percibidas por un observador respecto a un sistema de referencia no inercial, que percibe como es expulsado hacia el exterior de la curva en un movimiento circular. En realidad ese efecto se debe a la inercia: el objeto tiene tendencia a conservar su estado de movimiento rectilíneo y de ahí que perciba que es "expulsado" de la trayectoria circular hacia el lado externo de la curva. Definimos:

- Sistema de referencia inercial: sistema en el que las leyes del movimiento cumplen las leyes de Newton. Resumiendo y simplificando, son sistemas de referencia no acelerados, es decir, sistemas de referencia en reposo o movimiento rectilíneo e uniforme. En los sistemas de referencia inerciales se conserva el momento lineal.
- Sistema de referencia no inercial: son sistemas de referencia acelerados (sea con aceleración lineal o por rotación) respecto a sistemas de referencia inerciales. En estos sistemas no se cumplen las leyes de Newton excepto que usemos fuerzas ficticias (como la $F_{\text{centrífuga}}$).

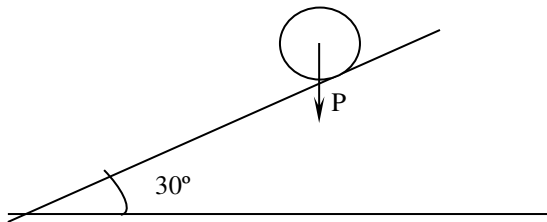
Por tanto, en problemas donde exista aceleración normal, tendremos: Una forma de resolverlo indicando en el problema que introducimos una fuerza ficticia como la $F_{\text{centrífuga}}$ para resolver el problema y poder aplicar las leyes de Newton.

La segunda forma de resolverlo calculando la resultante de todas las fuerzas existentes e igualarlas a la fuerza centrípeta $F = m \cdot v^2 / R$. Físicamente se explica que es la resultante de todas las fuerzas la que hace que se curve la trayectoria de la partícula en ese movimiento circular.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE RODADURA VS RODADURA Y DESLIZAMIENTO

1.- Una esfera maciza, pesada y homogénea se abandona sin velocidad inicial sobre un plano inclinado 30° . Si el coeficiente de rozamiento al deslizamiento con el plano es $\mu = 0'3$, se pide:

- Demostrar que la esfera rueda sin deslizar
- Calcular la aceleración del centro de gravedad de la esfera



Lo primero que hacemos es suponer que la esfera rueda sin deslizar, de forma que se cumple que en cada instante, el punto de la esfera que está en contacto con el suelo lleva velocidad cero respecto a éste, y entonces: $a = \alpha \cdot R$.

Además, aplicamos las condiciones de la dinámica:

$$\begin{aligned} \text{Traslación:} \quad & m \cdot g \cdot \sin 30^\circ - F_r = m \cdot a \\ \text{Rotación:} \quad & F_r \cdot R = I \cdot \alpha \\ & I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \end{aligned}$$

Lo que necesitamos comprobar es que la fuerza de rozamiento que calculamos mediante estas dos ecuaciones (F_r) es menor que la fuerza de rozamiento máxima para el problema (que viene dada por el valor de $\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ$ según el enunciado del problema:

$$F_r < \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ$$

De las ecuaciones escritas arriba, podemos obtener:

$$\alpha = \frac{5 \cdot F_r}{2 \cdot m \cdot R}$$

y además, $m \cdot g \cdot \sin 30^\circ - F_r = m \cdot \alpha \cdot R$

sustituyendo una en la otra: $m \cdot g \cdot \sin 30^\circ - F_r = \frac{5}{2} \cdot F_r$

por tanto: $F_r = \frac{2}{7} \cdot m \cdot g \cdot \sin 30^\circ$, y por último: **$F_r = 0'1429 \cdot m \cdot g$**

Podemos comprobar que este valor es menor que $\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ$, ya que esto tiene un valor de: $0'2598 \cdot m \cdot g$. **Conclusión: $F_r < \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^\circ$** El cilindro rueda sin deslizar.

Ahora ya podemos calcular el valor de la aceleración:

Como $\alpha = \frac{5 \cdot F_r}{2 \cdot m \cdot R}$, y además $F_r = 0'1429 \cdot m \cdot g$, sustituyendo:

$$\alpha = 3'50 \cdot \frac{1}{R} \text{ rad/seg}^2, \text{ y como } a = \alpha \cdot R, \text{ entonces } \mathbf{a = 3'50 \text{ m/seg}^2}.$$

2.- A la bola de billar del problema anterior (no hay datos que sean necesarios para resolver el problema) se le comunica una velocidad angular inicial ω_0 con velocidad lineal nula. Calcular la distancia que recorre hasta empezar a rodar sin deslizar. (Problema del Burbano)

Problema XI-61. A la bola de billar del problema anterior, se le comunica una velocidad angular inicial ω_0 , con velocidad lineal nula. Calcular la distancia que recorre hasta empezar a rodar sin deslizar.

Solución

La fuerza de rozamiento aumenta la velocidad lineal, con una aceleración dada por:

$$a = \frac{F_R}{m} = \mu g \text{ m/s}^2$$

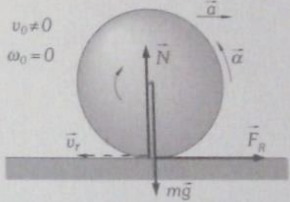
El momento de la fuerza de rozamiento varía la velocidad angular con una aceleración angular:

$$\alpha = -\frac{rF_R}{\frac{2}{5}mr^2} = -\frac{5\mu g}{2r} \text{ rad/s}^2$$

Cuando empiece a rodar sin deslizar se verificará: $v = \omega r$.

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at = \mu g t \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2r} t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mu g t = \omega_0 r - \frac{5\mu g}{2} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\omega_0 r}{7\mu g}$$

La distancia recorrida es:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g \frac{4\omega_0^2 r^2}{49\mu^2 g^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{2\omega_0^2 r^2}{49\mu g}}$$


Problema XI-61. La flecha discontinua representa la velocidad que el punto de apoyo de la esfera tiene respecto del suelo.